2. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В данной главе кратко изложены основные факты теории обобщенных функций. Даются определения пространств обобщенных функций и обобщенных функций медленного роста. Определяются основные операции над обобщенными функциями и их свойства, формулируются некоторые достаточные условия существования свертки обобщенных функций. Для обобщенных функций медленного роста определено преобразование Фурье, формулируются свойства преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста с компактным носителем.

2.1. Пространство основных функций

Основной функцией называется функция, принадлежащая пространству $C^{\infty}(R^n)$ и имеющая компактный носитель. Напомним, что *носителем основной функции* $\varphi(x)\in K$ называется замыкание множества тех точек, где $\varphi(x)\neq 0$. Будем обозначать носитель функции $\varphi(x)$ как $\operatorname{supp}\varphi(x)$.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u> . Множество основных функций с введенной на нем структурой линейного пространства над числовым полем называется пространством основных функций.

Выше в главе 1 мы определили в этом пространстве сходимость следующим образом: *последовательность основных функций $\{\varphi_n\}$ сходится в K к 0, если существует такое число $R>0$, что $\operatorname{supp}\varphi_i$ (для любого i) принадлежит шару радиуса R и равномерно вместе со всеми своими производными стремится к 0.*

Будем обозначать это линейное пространство через $D(R^n)$ (см. пример из п. 1.2).

<u>ПРИМЕР.</u>

Рассмотрим функциональную последовательность $\{\varphi_n\}$:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}e^{-\frac{n^2}{n^2-x^2}}, & |x|\le n;\\ 0, & |x|>n.\end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi^{(k)}{}_n(x)\in C^\infty(R^n)$ для всех $k\in N$. Легко проверить, что последовательность $\{\varphi_n\}$ вместе со всеми своими производными равномерно сходится к нулю, но не сходится в пространстве $D(R^n)$, так как не существует шара, который содержит носители всех членов последовательности.

2.2. Пространство обобщенных функций

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Обобщенной функцией называется непрерывный линейный функционал на пространстве основных функций.

Определим сложение и умножение обобщенных функций: *для любых обобщенных функций* f_1 *и* f_2 *и произвольных чисел* α_1 *и* α_2, *а также для любой пробной функции* $\varphi\in D(R^n)$ *справедливо соотношение:*

$$(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,\varphi)=\alpha_1(f_1,\varphi)+\alpha_2(f_2,\varphi).$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Множество обобщенных функций со структурой линейного пространства над числовым полем называется пространством обобщенных функций.

Обозначим пространство обобщенных функций $D'(R^n)$.

Сходимость в $D'(R^n)$ определяется следующим образом: *последовательность сходится к функции* $f\in D'(R^n)$ *в* $D'(R^n)$, *если для любой* $\varphi\in D(R^n)$ *числовая последовательность* (f_n,φ) *сходится к* $(f,\ \varphi)$.

Введем понятие носителя обобщенной функции. Определение, данное для носителя основной функции, в этом случае не подходит, так как значение обобщенной функции в точке не определено.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Обобщенная функция f равна нулю в области G, если для любой функции $\varphi\in D(R^n)$, ***такой, что при*** $\operatorname{supp}\varphi\subset G$ ***выполнено условие*** $(f,\varphi)=0$.

<u>ЛЕММА.</u> Если $f\in D'(R^n)$ ***равна нулю в некоторой окрестности каждой точки области G, то эта функция равна нулю в G.***

Из леммы следует, что обобщенная функция равна нулю в области *G* тогда и только тогда, когда она равна нулю в некоторой окрестности каждой точки *G*.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Нулевым множеством функции $f \in D'(R^n)$ называется множество, являющееся объединением всех окрестностей, в которых $f = 0$. Будем обозначать его как O_f.

Ясно, что O_f – открытое множество, отсюда следует, что множество $\operatorname{supp} f = R^n \setminus \mathrm{O}_f$ – замкнутое множество. Будем называть $\operatorname{supp} f$ носителем обобщенной функции f.

Ясно, что любой локально интегрируемой функции $f(x)$ соответствует линейный функционал вида

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx. \qquad (2.2.1)$$

Здесь $\varphi \in D(R^n)$. Этот функционал линеен, так как для любых $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, принадлежащих $D(R^n)$,

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \int_{R^n} f(x)(\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x))dx = \alpha_1 \int_{R^n} f(x)\varphi_1(x)dx + \alpha_2 \int_{R^n} f(x)\varphi_2(x)dx =$$
$$= \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2),$$

и непрерывен, так как если последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится к нулю в $D(R^n)$, то

$$\lim_{n\to\infty}(f, \varphi_n) = 0.$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Обобщенная функция, которая определяется локально интегрируемой в R^n функцией $f(x)$ по формуле (2.2.1), называется регулярной обобщенной функцией. Остальные обобщенные функции называются сингулярными.

<u>ПРИМЕР 2.2.1.</u> Простейшим примером регулярной обобщенной функции является функция $f(x) = C$, где C – константа.

$$(f, \varphi) = (C, \varphi) = C\int_{R^n} \varphi(x)dx.$$

Теперь приведем пример сингулярной обобщенной функции.

<u>ПРИМЕР 2.2.2.</u> Рассмотрим пример δ-функции, а именно линейного непрерывного функционала φ, определенного на $D(R^n)$, следующим образом: $\forall \varphi(x) \in D(R^n)$, $\delta : \varphi(x) \to \varphi(0)$. Докажем, что δ-функция – сингулярная обобщенная функция.

Линейность δ-функции очевидна. Пусть существует такая локально интегрируемая функция $f(x)$, что

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \forall \varphi(x) \in D(R^n).$$

Возьмем

$$\varphi_a(x)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x|\le a;\\ 0, & |x|>a.\end{cases},$$

Тогда $\int\limits_{R^n} f(x)\varphi_a(x)dx=\varphi_a(0)=\frac{1}{e},\forall a\in R,$ но $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_{R^n} f(x)\varphi_a(x)dx=0.$ Пришли к противоречию. Значит, δ-функция – сингулярная обобщенная функция.

ПРИМЕР 2.2.3. Введем непрерывный линейный функционал $P\frac{1}{x}$:

$$(P\frac{1}{x},\varphi)=v.p.\int\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Очевидно, что $P\frac{1}{x}\in D'(R^n)$. Докажем, что обобщенная функция $P\frac{1}{x}$ является сингулярной обобщенной функцией. Пусть существует локально интегрируемая функция, такая, что

$$(P\frac{1}{x},\varphi)=\int g(x)\varphi(x)dx,\forall\varphi(x)\in D(R^n).$$

Выберем последовательность, состоящую из основных функций φ_n, таких, что $|\varphi_n(x)|\le 1$, $\operatorname{supp}\varphi_n(x)\subset[-2,2]$, $\varphi_n(x)=1$ при $\frac{1}{n}\le x\le 1$ и $\varphi_n(x)=-1$ при $-1\le x\le -\frac{1}{n}$.

Тогда, очевидно, при

$$(P\frac{1}{x},\varphi_n)=Vp\int\frac{\varphi_n(x)}{x}dx\longrightarrow\infty.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)\varphi_n(x)dx=\int\limits_{-2}^{2}g(x)\varphi_n(x)dx\le\int\limits_{-2}^{2}|g(x)||\varphi_n(x)|dx\le\int\limits_{-2}^{2}|g(x)|dx.$$

Пришли к противоречию. Отсюда следует, что $P\frac{1}{x}\in D'(R^n)$ – сингулярная обобщенная функция.

С помощью этой функции можно получить известную формулу Сохоцкого. Пусть $\operatorname{supp}\varphi_n(x)\subset[-R,R]$. Так как

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx=\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}(\varphi(x)-\varphi(0))dx$$

и так как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}dx=0,$ и $\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}dx=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{\frac{x^2}{\varepsilon^2}+1}d\frac{x}{\varepsilon}=\frac{2}{\varepsilon}arctg\frac{R}{\varepsilon},$ то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx=-2i\varphi(0)arctg\frac{R}{\varepsilon}+\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx=-i\pi\varphi(0)+v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Таким образом, мы получили, что предел обобщенной функции $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ при $\varepsilon \to +0$ равен $-i\pi\varphi(0)+Vp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$ Запишем эту формулу в виде

$$\frac{1}{x+i0}=-i\pi\delta(x)+P\frac{1}{x}.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{x-i0}=i\pi\delta(x)+P\frac{1}{x}.$$

Последние две формулы называются формулами Сохоцкого.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Будем говорить, что обобщенные функции $f_1 \in D'(R^n)$ и $f_2 \in D'(R^n)$ равны, если $\forall \varphi(x) \in D(R^n)$ выполнено соотношение $(f_1,\varphi)=(f_2,\varphi)$.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ</u>. Регулярные обобщенные функции $f_1 \in D'(R^n)$ и $f_2 \in D'(R^n)$ равны тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$ почти всюду.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Без ограничения общности, для упрощения выкладок проведем их для одномерного случая.

Пусть $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\varphi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\varphi(x)dx,$ а функция $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ не равна нулю.

Обозначим через $[a,b]$ некоторый отрезок, который содержит $\operatorname{supp}\varphi(x)\subset[a,b]$.

Тогда, обозначив $F(x)=\int\limits_a^x f(x)dx,$ получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx=\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=\int\limits_a^b \varphi(x)dF(x)=F(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)dx=-\int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)dx=0.$$

Так как $f(x)$ – локально интегрируемая функция, то функция $F(x)$ непрерывна, поэтому если $F(x)$ не равна нулю, то можно выбрать функцию $\varphi'(x)$, такую, что $\int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)dx>0.$ Отсюда следует, что $F(x)=0$ почти всюду на $[a,b]$, а это значит, что $F'(x)=f(x)=0$ почти всюду на любом отрезке. Пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует следующая лемма.

<u>ЛЕММА (де Буа-Раймона).</u> Для того, чтобы локально интегрируемая в R^n функция $f(x)$ обращалась в ноль в R^n в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)=0$ почти всюду.

2.3. Простейшие операции над обобщенными функциями

В первом параграфе этой главы были введены операции суммы обобщенных функций и произведение обобщенной функции на число.
Введем еще несколько операций над обобщенными функциями.

1. Пусть $g(x) \in C^{\infty}(R^n)$, тогда определено умножение функции $g(x)$ и обобщенной функции $f \in D(R^n)$

$$(g(x)f, \varphi) = (f, g(x)\varphi).$$

2. Производная обобщенной функции определяется следующим образом

$$(D^{\alpha} f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^{\alpha}\varphi), \varphi \in D(R^n).$$

Докажем, что операции определены корректно, то есть что $g(x)f$ и являются обобщенными функциями. Для этого докажем, что они являются линейными непрерывными функционалами.
Ясно, что для любых функций $\varphi_1(x) \in D(R^n)$ и $\varphi_2(x) \in D(R^n)$, и произвольных чисел α_1 и α_2

$$(gf, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = (f, (\alpha_1 g\ \varphi_1 + \alpha_2 g\varphi_2)) = \alpha_1(f, g\ \varphi_1) + \alpha_2(f, g\ \varphi_2) = \alpha_1(gf,\ \varphi_1) + \alpha_2(gf,\ \varphi_2).$$

Это доказывает линейность функционала. Докажем его непрерывность.
Пусть последовательность φ_n сходится к φ в $D(R^n)$, тогда ясно, что $g\varphi_n \to g\varphi$, поэтому

$$(gf, \varphi_n) = (f, g\varphi_n) \to (f, g\varphi) = (gf, \varphi).$$

Таким образом, функционал **gf** – непрерывен.
Докажем линейность функционала $D^{\alpha} f$ на $D(R^n)$.

$$(D^{\alpha} f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = (-1)^{|\alpha|}(f, \alpha_1 D^{\alpha}\varphi_1 + \alpha_2 D^{\alpha}\varphi_2) = (-1)^{|\alpha|}\alpha_1(f, D^{\alpha}\varphi_1) + \alpha_2(-1)^{|\alpha|}(f, D^{\alpha}\varphi_2).$$

Непрерывность этого функционала следует из того, что

$$(D^{\alpha} f, \varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^{\alpha}\varphi_n) \to (-1)^{|\alpha|}(f, D^{\alpha}\varphi) = (D^{\alpha} f, \varphi).$$

<u>ЗАДАЧА.</u> Доказать, что результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

2.4. Прямое произведение обобщенных функций и их свойства

Важным инструментом математической физики является операция свертки. Для локально интегрируемых в R^n функций $f(x)$ и $g(x)$ их свертка $f * g$ определяется интегралом

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy = (g * f)(x), \qquad (2.4.1)$$

при условии, что этот интеграл существует и определяет локально интегрируемую в R^n функцию $(f*g)(x)$. Наша задача – распространить это определение на обобщенные функции.

Сначала определим произведение обобщенных функций с различными аргументами (прямое произведение). Произведение локально интегрируемых функций $f(x)$ в R^n и $g(y)$ в R^m является локально интегрируемой функцией в R^{n+m}. Эта функция определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi(x,y)\in D$ по формулам:

$$(f(x)g(y),\varphi)=\int f(x)g(y)\varphi(x,y)dxdy=\int f(x)\int g(y)\varphi(x,y)dxdy= \tag{2.4.2}$$

$$=(f(x),(g(y),\varphi(x,y))),$$

$$(g(y)f(x),\varphi)=\int g(y)f(x)\varphi(x,y)dxdy=\int g(y)\int f(x)\varphi(x,y)dxdy=$$

$$=(g(y),(f(x),\varphi(x,y))).$$

Эти равенства следуют из теоремы о совпадении повторных интегралов с кратным. Равенство (2.4.2) мы и примем за определение прямого произведения $f(x)\times g(y)$ обобщенных функций $f\in D'(R^n)$ и $g\in D'(R^m)$:

$$(f(x)\times g(y),\varphi)=(f(x),(g(y),\varphi(x,y))),\quad \varphi\in D(R^{n+m}). \tag{2.4.3}$$

Это определение корректно, т.е. правая часть равенства (2.4.3) определяет линейный непрерывный функционал на $D(R^{n+m})$. Действительно, можно проверить, что функция $\psi(x)=(g(y),\varphi(x,y))$ принадлежит $D(R^n)$, так что правая часть равенства (2.4.3), равная (f,ψ), определяет функционал на $D(R^{n+m})$ для любых обобщенных функций f и g. Линейность этих функционалов зависит от линейности функционалов f и g. Можно доказать, что этот функционал непрерывен на $D(R^{n+m})$, так что $f(x)\times g(y)\in D'(R^{n+m})$, т.е. является обобщенной функцией на R^{n+m}.

Перечислим *свойства прямого произведения*.

а) Операция прямого произведения $f(x)\times g(y)$ *линейна и непрерывна* по f (из $D'(R^n)$ в $D'(R^{n+m})$) и по g (из $D'(R^m)$ в $D'(R^{n+m})$), например:

$$[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)]\cdot g(y)=\lambda_1[f_1(x)\times g(y)]+\lambda_2[f_2(x)\times g(y)],$$

$f_k(x)\times g(y)\to 0$ в $D'(R^{n+m})$, если $f_k\to 0$ в $D'(R^n)$, $k\to\infty$.

б) *Ассоциативность* прямого произведения.

Если $f\in D'(R^n)$, $g\in D'(R^m)$ и $h\in D'(R^k)$, то

$$[f(x)\times g(y)]\times h(z)=f(x)\times[g(y)\times h(z)] \tag{2.4.4}$$

Действительно, если $\varphi\in D(R^{n+m+k})$, то

$$([f(x)\times g(y)]\times h(z),\varphi)=(f(x)\times g(y),(h(z),\varphi(x,y,z)))=(f(x),(g(y),(h(z),\varphi(x,y,z))))=$$
$$=(f(x),(g(y)\times h(z),\varphi(x,y,z)))=(f(x)\times[g(y)\times h(z)],\varphi).$$

в) *Коммутативность* прямого произведения.

$$f(x)\times g(y)=g(y)\times f(x),\qquad f\in D'(R^n),\ g\in D'(R^m). \tag{2.4.5}$$

Действительно, в соответствии с формулой (2.4.3) прямое произведение $g(y)\times f(x)$ определяется равенством

$$(g(y)\times f(x),\varphi)=(g(y),(f(x),\varphi(x,y))),\quad \varphi\in D(R^{n+m}). \tag{2.4.3'}$$

Действительно, на основных функциях φ вида

$$\varphi(x,y)=\sum_{1\le i\le N}u_i(x)v_i(y),\quad u_i\in D(R^n),\quad v_i\in D(R^m), \tag{2.4.6}$$

справедливость равенства (2.4.5) проверяется непосредственно:

$$(f(x)\times g(y),\varphi)=\left(f,\sum_{1\le i\le N}u_i(g,v_i)\right)=\sum_{1\le i\le N}(f,u_i)(g,v_i)=\left(g,\sum_{1\le i\le N}v_i(f,u_i)\right)=(g(y)\times f(x),\varphi).$$

С помощью теоремы Вейерштрасса можно доказать, что множества основных функций вида (2.4.6) плотно в $D(R^{n+m})$. В силу непрерывности прямого произведения отсюда следует справедливость равенства (2.4.5) на всем $D(R^{n+m})$.

г) *Дифференцирование* прямого произведения:

$$\partial_x^\alpha[f(x)\times g(y)]=\partial^\alpha f(x)\times g(y). \tag{2.4.7}$$

В самом деле, если $\varphi\in D(R^{n+m})$, то

$$\left(\partial_x^\alpha[f(x)\times g(y)],\varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(f(x)\times g(y),\partial_x^\alpha\varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(g(y),\left(f(x),\partial_x^\alpha\varphi(x,y)\right)\right)=$$
$$=\left(g(y),\left(\partial^\alpha f(x),\varphi\right)\right)=\left(\partial^\alpha f(x)\times g(y),\varphi\right).$$

д) *Умножение* прямого произведения: если $a\in C^\infty(R^n)$, то

$$a(x)[f(x)\times g(y)]=a(x)f(x)\times g(y). \tag{2.4.8}$$

Действительно, пусть $\varphi\in D(R^{n+m})$, тогда

$$\left(a(x)[f(x)\times g(y)],\varphi\right)=\left(f(x)\times g(y),a\varphi\right)=\left(f(x),\left(g(y),a(x)\varphi(x,y)\right)\right)=\left(f(x),a(x)\left(g(y),\varphi(x,y)\right)\right)$$
$$=\left(a(x)f(x),\left(g(y),\varphi(x,y)\right)\right)=\left(a(x)f(x)\times g(y),\varphi\right).$$

е) *Сдвиг* прямого произведения:

$$(f\times g)(x+h,y)=f(x+h)\times g(y). \tag{2.4.9}$$

В самом деле, если $\varphi\in D(R^{n+m})$, то

$$\left((f\times g)(x+h,y),\varphi\right)=\left(f(x)\times g(y),\varphi(x-h,y)\right)=\left(g(y),\left(f(x),\varphi(x-h,y)\right)\right)=$$
$$=\left(g(y),\left(f(x+h),\varphi(x,y)\right)\right)=\left(f(x+h)\times g(y),\varphi\right).$$

ж) Говорят, что обобщенная функция не зависит от y, если она имеет вид $f(x)\times 1(y)$. В этом случае в силу (2.4.5)

$$\left(f(x)\times 1(y),\varphi\right)=\left(f(x),\int\varphi(x,y)dy\right)=\left(1(y)\times f(x),\varphi\right)=\int\left(f(x),\varphi(x,y)\right)dy$$

для всех $\varphi\in D(R^{n+m})$.

Таким образом,

$$\left(f(x),\int\varphi(x,y)dy\right)=\int\left(f(x),\varphi(x,y)\right)dy,\quad f\in D'(R^n),\ \varphi\in D(R^{n+m}). \tag{2.4.10}$$

2.5. Свертка обобщенных функций

Для локально интегрируемых в R^n функций $f(x)$ и $g(x)$ их свертка $f*g$ определяется формулой (2.4.1). Если интеграл (2.4.1) есть локально интегрируемая в R^n функция, то свертка $f*g$ определяет регулярную обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi \in D(R^n)$ по правилу

$$(f*g,\varphi)=\int (f*g)(\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int\left[\int g(y)f(\xi-y)dy\right]\varphi(\xi)dx=\int g(y)\left[\int f(\xi-y)\varphi(\xi)dy\right]dx=$$
$$=\int g(y)\left[\int f(x)\varphi(x+y)dx\right]dy,$$

т.е.

$$(f*g,\varphi)=\int f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy, \qquad \varphi \in D(R^n). \qquad (2.5.1)$$

Отметим, что мы воспользовались здесь теоремой о перестановке порядков интегрирования и о равенстве повторных интегралов кратному. Применимость этой теоремы будет заведомо обоснована, если мы предположим, что свертка $|f|*|g|(x)$ локально интегрируемых в R^n функций $|f(x)|$ и $|g(x)|$ есть локально интегрируемая в R^n функция

$$h(x)\equiv|f|*|g|(x)=\int|f(y)||g(x-y)|dy \in L_{loc}. \qquad (2.5.2)$$

При этом будет справедливо неравенство

$$|f*g(x)|\le h(x). \qquad (2.5.3)$$

Отметим три случая, когда приведенное выше условие выполнено, и, стало быть, свертка $f*g$ существует.

1. Хотя бы одна из функций f, g финитна, например $\operatorname{supp} g \subset U_\rho$:

$$\int_{U_R} h(x)dx=\int_{U_\rho}|g(y)|\int_{U_R}|f(x-y)|dxdy\le\int_{U_\rho}|g(y)|dy\int_{U_{R+\rho}}|f(\xi)|d\xi<\infty.$$

Формула (2.4.1) принимает вид:

$$(f*g)(x)=\int_{U_\rho} g(y)f(x-y)dy. \qquad (2.5.4)$$

2. Функции f и g обращаются в ноль при $x<0$ $(n=1)$:

$$\int_{-R}^{R} h(x)dx=\int_0^R\int_0^x|g(y)||f(x-y)|dydx=\int_0^R|g(y)|\int_0^R|f(x-y)|dxdy\le\int_0^R|g(y)|dy\int_0^R|f(\xi)|d\xi<\infty.$$

Тогда формулу (2.4.1) можно переписать в виде:

$$(f*g)(x)=\int_0^x g(y)f(x-y)dy. \qquad (2.5.5)$$

3. Функции f и g, интегрируемые на R^n:

$$\int h(x)dx=\int|g(y)|\int|f(x-y)|dxdy\le\int|g(y)|dy\int|f(\xi)|d\xi<\infty,$$

так что в этом случае свертка $f*g$ интегрируема на R^n.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Последовательность $\{\eta_k\}$ ***функций из*** $D(R^n)$ ***сходится к 1 в*** R^n***, если***

а) для любого компакта K ***найдется такой номер*** $N=N(K)$***, что*** $\eta_k(x)=1$, $x\in K$, $k\ge N$;

б) функции $\{\eta_k\}$ ***равномерно ограничены вместе со всеми производными,*** $|\partial^\alpha\eta_k(x)|<C_\alpha$, $x\in R^n$, $k=1,2,\ldots$, α ***– любое.***

Отметим, что такие последовательности всегда существуют, например: $\eta_k(x)=\eta\left(\frac{x}{k}\right)$, где $\eta\in D$, $\eta(x)=1$, $|x|<1$.

Докажем теперь, что равенство (2.5.5) можно переписать в виде

$$(f*g,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)*g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)),\quad \varphi\in D(R^n), \qquad (2.5.5')$$

где $\{\eta_k\}$ – любая последовательность, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Действительно, в силу условия (2.5.2) функция $|f(x)g(y)\varphi(x+y)|$ интегрируема на R^{2n} для любой $\varphi\in D(R^n)$. Поэтому, применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла, получим

$$\int f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy=\lim_{k\to\infty}\int f(x)g(y)\eta_k(x;y)\varphi(x+y)dxdy,$$

эквивалентное, в силу (2.5.5), равенству (2.5.5').

Исходя из равенств (2.5.5) и (2.5.5'), примем следующее определение свертки обобщенных функций. Пусть f и g из $D'(R^n)$ таковы, что их прямое произведение $f(x)\times g(y)$ допускает продолжение $(f(x)\times g(y),\varphi(x+y))$ на функции вида $\varphi(x+y)$, где φ – любая функция из $D'(R^n)$ в следующем смысле: какова бы не была последовательность $\{\eta_k\}$ функций из $D(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}, существует предел числовой последовательности

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y))=(f(x)\times g(y),\varphi(x+y)). \qquad (2.5.6)$$

И этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\eta_k\}$. Отметим, что при каждом k функция $\eta_k(x;y)\varphi(x+y)\in D(R^{2n})$, так что наша числовая последовательность определена.

Сверткой $f*g$ таких обобщенных функций называется функционал

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\varphi(x+y))=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)), \qquad (2.5.7)$$

где $\varphi\in D(R^n)$.

Докажем, что функционал $f*g$ принадлежит $D'(R^n)$, т.е. является обобщенной функцией. Для этого, в силу полноты пространства $D'(R^n)$, достаточно установить непрерывность линейных функционалов

$$(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)),\quad k=1,2,\dots \qquad (2.5.8)$$

на $D(R^n)$. Пусть $\varphi_\nu\to 0$, $\nu\to\infty$ в $D(R^n)$. Тогда

$$\eta_k(x;y)\varphi_\nu(x+y)\to 0,\ \text{в}\ D(R^{2n}),\ \nu\to\infty,$$

поскольку $\eta_k\in D(R^{2n})$. Отсюда в силу непрерывности функционала $f(x)\times g(y)$ на $D(R^{2n})$ получаем

$$(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi_\nu(x+y))\to 0,\ \nu\to\infty,$$

что и доказывает непрерывность функционалов (2.5.8) на $D(R^n)$.

Заметим, что, поскольку $\varphi(x+y)$ не принадлежит $D(R^{2n})$ (она не финитна в R^{2n}), правая часть равенства (2.5.7) существует не для любых пар обобщенных функций f и g, таким образом, свертка существует не всегда.

Например, свертка локально интегрируемой функции $f(x)=1$ и $g(x)=\theta(x)$ не существует в $D'(R^1)$, поскольку для всякой $\varphi\in D(R^1)$ должно быть

$$(1*\theta,\varphi)=\lim_{k\to\infty}\big(\theta(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)=\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\eta_k(x,y)\varphi(x+y)dxdy,$$

а последний предел не существует (иначе он был бы равен $\int\varphi(x)dx\times\int_0^\infty dy$, где первый интеграл всегда конечен, а второй расходится).

Свертка любой обобщенной функции f из D' с δ-функцией существует и равна f:

$$f*\delta=\delta*f=f.$$

Действительно, пусть $\varphi\in D(R^n)$ и $\{\eta_k\}$ – последовательность функций из $D(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Тогда

$$\eta_k(x;0)\varphi(x)\to\varphi,\quad k\to\infty \text{ в } D(R^n)$$

и поэтому

$$(f*\delta,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times\delta(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y))=\lim_{k\to\infty}(f(x),\eta_k(x;0)\varphi(x))=(f,\varphi).$$

Отсюда в силу определения (2.5.7) следует, что свертки $f*\delta$ и $\delta*f$ существуют и равны f, что и утверждалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. *Смысл формулы $f=f*\delta$ состоит в том, что всякую обобщенную функцию f можно разложить по δ - функциям, что формально записывают так:*

$$f(x)=\int f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi.$$

Именно эту формулу и имеют в виду, когда говорят, что всякое материальное тело состоит из точечных масс, всякий источник состоит из точечных источников и т.д.

2.6. Свойства свертки

а) *Линейность свертки.* Свертка $f*g$ – линейная операция из D' в D' относительно f и g в отдельности, например:

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)*g=\lambda_1(f_1*g)+\lambda_2(f_2*g),\qquad f_1,f_2,g\in D',$$

при условии, что свертки f_1*g и f_2*g существуют.

Это свойство свертки следует из определения (2.5.7) и из линейности прямого произведения $f(x)\times g(y)$ относительно f и g в отдельности.

Отметим попутно, что свертка $f*g$, вообще говоря, не является непрерывной из D' в D' относительно f и g, как показывает пример:

$\delta(x-k)\to 0,\ k\to\infty$ в $D'(R^1)$, однако $1*\delta(x-k)=1$.

б) *Коммутативность свертки.* Если свертка $f*g$ существует, то существует и свертка $g*f$, и они равны:

$$f * g = g * f. \qquad (2.6.1)$$

Это утверждение вытекает из определения свертки и из коммутативности прямого произведения.

$(f * g,\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) = \lim\limits_{k\to\infty}(g(y)\times f(x),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) = (g * f,\varphi)$, $\varphi \in D$.

в) *Дифференцирование свертки.* Если свертка $f * g$ существует, то существует и свертка $\partial^\alpha f * g$ и $f * \partial^\alpha g$, причем

$$\partial^\alpha f * g = \partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g. \qquad (2.6.2)$$

Утверждение достаточно доказать для первых производных ∂_j, $j = 1,\ldots,n$. Пусть $\varphi \in D(R^n)$ и $\{\eta_k(x,y)\}$ – последовательность функций из $D(R^{2n})$, сходящаяся к **1** в R^{2n}. Тогда последовательность $\left\{\eta_k + \dfrac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right\}$ также сходится к 1 в R^{2n}. Отсюда, пользуясь существованием свертки $f * g$ в $D'(R^n)$, получаем следующую цепочку равенств:

$$(\partial_j(f * g),\varphi) = -(f * g,\partial_j\varphi) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_j}\right) =$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\frac{\partial}{\partial x_j}\eta_k(x;y)\varphi(x+y) - \varphi(x+y)\frac{\partial\eta_k(x;y)}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}[f(x)\times g(y)],\eta_k(x;y)\varphi(x+y)\right) + \lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\left[\eta_k(x;y) + \frac{\partial\eta_k(x;y)}{\partial x_j}\right]\varphi(x+y)\right) -$$

$$-\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(\partial_j f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) + (f * g,\varphi) - (f * g,\varphi) = (\partial_j f * g,\varphi),$$

откуда и следует первое равенство (2.6.2) для ∂_j. Второе из равенств следует из первого и из коммутативности свертки:

$$\partial_j(f * g) = \partial_j(g * f) = \partial_j g * f = f * \partial_j g.$$

Из равенств (2.6.2) вытекают равенства

$$\partial^\alpha f * g = \partial^\alpha \delta * f = \delta * \partial^\alpha f, \quad f \in D'. \qquad (2.6.3)$$

Отметим, что существование сверток $\partial^\alpha f * g$ и $f * \partial^\alpha g$ при $|\alpha| \geq 1$ еще не достаточно для существования свертки $f * g$ и справедливости равенств (2.6.2). Например, $\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$, но $\theta * 1' = \theta * 0 = 0$.

Вообще говоря, операция свертки не ассоциативна, например:

$$(1 * \delta') * \theta = 1' * \theta = 0 * \theta = 0, \text{ но } 1 * (\delta' * \theta) = 1 * \delta = 1.$$

г) *Сдвиг свертки.* Если свертка $f * g$ существует, то существует и свертка $f(x+h) * g(x)$ при всех $h \in R^n$, причем

$$f(x+h) * g(x) = (f * g)(x+h), \qquad (2.6.4)$$

т.е. операции сдвига и свертки коммутируют.

Действительно, пусть $\{\eta_k\}$ – последовательность функций из $D(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Тогда при любом $h \in R^n$ $\eta_k(x-h;y) \to 1$, $k \to \infty$ в R^{2n}.

Теперь, пользуясь определениями сдвига и свертки, при всех $\varphi \in D(R^n)$ получаем

$$((f*g)(x+h),\varphi) = (f*g,\varphi(x+h)) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\eta_k(x-h;y)\varphi(x-h+y)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(f(x+h)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) = (f(x+h)*g,\varphi),$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались формулой (2.4.9) для сдвига прямого произведения.

2.7. Существование свертки

Установим достаточные условия (помимо приведенных в п.2.5) существования свертки в D'.

ТЕОРЕМА 2.7.1. ***Пусть f – произвольная, а g – финитная обобщенная функция. Тогда свертка $f*g$ существует в D' и представляется в виде***

$$(f*g,\varphi) = \bigl(f(x)\times g(y),\eta(y)\varphi(x+y)\bigr), \quad \varphi \in D, \qquad \textbf{(2.7.1)}$$

где η – любая основная функция, равная 1 в окрестности носителя g. При этом свертка непрерывна относительно f и g в отдельности:

если $f_k \to 0$ в D', $k\to\infty$, то $f_k(x)\times g(y)\to 0$, $k\to\infty$ в D';

если $g_k \to 0$ в D', $k\to\infty$, причем $\operatorname{supp} g_k \subset U_R$, где $R>0$ не зависит от $k=1,2,\ldots$, то $f(x)\times g_k(y)\to 0$, $k\to\infty$ в D'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\operatorname{supp} g \subset U_R$, η – функция из $D(R^n)$, равная 1 в окрестности $\operatorname{supp} g$ и $\operatorname{supp} \eta \subset U_R$. Пусть, далее, φ – произвольная функция из $D(R^n)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U_A$ и $\eta_k(x,y)$, $k=1,2,\ldots$ – последовательность, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Тогда при всех достаточно больших k

$$\eta(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y) = \eta(y)\varphi(x+y). \qquad (2.7.2)$$

Для доказательства равенства (2.7.2) следует проверить, что функция $\eta(y)\varphi(x+y)$ принадлежит $D(R^{2n})$. Но это вытекает из того, что она бесконечно дифференцируема и ее носитель лежит в ограниченном множестве:

$$\{(x,y): |x+y| \le A, |y| \le R\} \subset \overline{U}_{A+R}\times\overline{U}_R.$$

Учитывая теперь соотношение (2.7.2) и равенство $g=\eta g$, убеждаемся в справедливости формулы (2.7.1):

$$(f*g,\varphi) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\times\eta(y)g(y),\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\eta(y)\eta_k(x;y)\varphi(x+y)) = (f(x)\times g(y),\eta(y)\varphi(x+y)).$$

Непрерывность свертки $f*g$ относительно f и g вытекает из непрерывности (2.7.1) и из непрерывности прямого произведения $f(x)\times g(y)$ относительно f и g в отдельности. При этом условие $\operatorname{supp} g_k \subset U_R$ позволяет выбрать вспомогательную функцию η, единственную для g_k. Теорема доказана.

Обозначим через $D'_+(R^1)$ множество обобщенных функций из пространства $D'(R^1)$, обращающихся в ноль при $t<0$.

<u>ТЕОРЕМА 2.7.2.</u> *Пусть $f,g \in D'_+$. Тогда их свертка $f*g$ существует в D'_+ и представляется в виде:*

$$(f*g,\varphi)=\left(f(t)\times g(\tau),\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)\right), \quad \varphi \in D(R^1), \qquad (2.7.3)$$

где η_1,η_2 – любые функции класса $D^\infty(R^1)$, равные 1 в окрестности полуоси $[0,\infty)$ и 0 при достаточно больших отрицательных t. При этом свертка непрерывна относительно f и g в отдельности, например, если $f_k \in D'_+$ и $f_k \to 0$ в D', $k\to\infty$, то $f_k*g\to 0$ в D', $k\to\infty$.

<u>*ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.*</u>

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.7.1. Пусть $\varphi(t)\in D(R^1)$ и $\eta_k(t,\tau)$ – последовательность, сходящаяся к 1 в R^2. Тогда при всех достаточно больших k справедливо равенство:

$$\eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta_k(t,\tau)\varphi(t+\tau)=\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)\in D(R^2).$$

Учитывая теперь это равенство и равенство $f=\eta_1 f$, $g=\eta_2 g$, убеждаемся в существовании свертки $f*g$ в $D'(R^1)$ и в справедливости формулы (2.7.3):

$$(f*g,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(t)\times g(\tau),\eta_k(t;\tau)\varphi(t+\tau))=\lim_{k\to\infty}(\eta_1(t)f(t)\times\eta_2(\tau)g(\tau),\eta_k(t;\tau)\varphi(t+\tau))=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(f(t)\times g(\tau),\eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta_k(t;\tau)\varphi(t+\tau))=(f(t)\times g(\tau),\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)).$$

Из представления (2.7.3) следует, что $f*g=0$ при $t<0$ (т.е. $f*g\in D'_+$), и верны остальные утверждения теоремы.

<u>СЛЕДСТВИЕ.</u> Свертка обобщенных функций из D'_+ коммутативна и ассоциативна:

$$f*g=g*f, \quad f*(g*h)=(f*g)*h, \quad f,g,h\in D'_+.$$

2.8. Пространство Шварца

Обозначим через $S_\infty(R^n)$ – линейное пространство, состоящее из функций, принадлежащих пространству $C^\infty(R^n)$, убывающих вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

То есть если $\varphi(x)\in S_\infty(R^n)$, то $\forall p,q\ \exists C_{q,p}(\varphi): \left|x^p\varphi^{(q)}(x)\right|<C_{q,p}$. Как было показано ранее, пространство $S_\infty(R^n)$ является счетно-нормируемым и $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ldots$ сходится в нем. Определим сходимость следующим образом: *последовательность $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ldots$ сходится к φ в $S_\infty(R^n)$, если $\forall\alpha,\beta$*

$$x^\beta D^\alpha\varphi_k(x)\rightrightarrows x^\beta D^\alpha\varphi(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Обобщенной функцией медленного роста называется линейный непрерывный функционал над пространством*** $S_\infty(R^n)$.

Через S'_∞ обозначим линейное пространство, элементами которого являются обобщенные функции медленного роста. Сходимость в определяется как слабая сходимость последовательности функционалов.

Заметим, что в отличие от D', в S'_∞ не любая локально интегрируемая функция определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста. Например, функция e^x локально интегрируема, но, очевидно, не определяет локально интегрируемую функцию медленного роста.

Сформулируем необходимое и достаточное условие того, чтобы линейный функционал над пространством Шварца являлся обобщенной функцией медленного роста.

ТЕОРЕМА 2.8.1 (Л. Шварца). ***Для того, чтобы линейный функционал*** f ***на*** S_∞ ***принадлежал (то есть был непрерывным на*** S_∞***), необходимо и достаточно, чтобы существовали число*** $C>0$ ***и целое число*** $p\geq 0$, ***такие, что***

$$|(f,\varphi)|\leq C\|\varphi\|_p \qquad \textbf{(2.8.1)}$$

для любой $\varphi\in S$, ***где***

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha|\leq p, x\in R^n}(1+|x|)^p|\partial^\alpha\varphi(x)|. \qquad \textbf{(2.8.2)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточность.

Пусть линейный функционал f на S_∞ удовлетворяет неравенству (2.8.1) при некоторых $C>0$ и $p\geq 0$. Докажем, что $f\in S'_\infty$. Пусть $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в S. Тогда $\|\varphi_k\|_p\to 0$, $k\to\infty$, а потому $|(f,\varphi_k)|\leq C\|\varphi_k\|_p\to 0$, $k\to\infty$. Это значит, что f – непрерывный функционал на S_∞.

Необходимость.

Пусть $f\in S'_\infty$. Докажем, что существуют числа $C>0$ и $p\geq 0$, такие, что для любой $\varphi\in S_\infty$ справедливо неравенство (2.8.1). Пусть, напротив, указанных чисел C и p не существует. Тогда найдется последовательность функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ из S_∞, таких, что

$$|(f,\varphi_k)|\geq k\|\varphi_k\|_k. \qquad (2.8.3)$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x)=\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k}, \qquad k=1,2,\ldots,$$

сходится к 0 в S_∞, ибо при $k\geq|\alpha|$ и $k\geq|\beta|$

$$|x^\beta\partial^\alpha\psi_k(x)|=\frac{|x^\beta\partial^\alpha\varphi_k(x)|}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Отсюда и из непрерывности функционала f на S_∞ следует, что $|(f,\psi_k)|\to 0$, $k\to\infty$. С другой стороны, неравенство (2.8.3) дает

$$|(f,\psi_k(x))| = \frac{1}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k}|(f,\varphi_k(x))| \geq \sqrt{k}.$$

Полученное соотношение доказывает теорему.

2.9. Преобразование Фурье в пространстве

Пусть $\varphi(x)\in S_\infty(R^n)$. Так как $\varphi(x)$ – абсолютно интегрируемая функция, то для нее определено преобразование Фурье:

$$F[\varphi]=\int_{R^n} e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx.$$

Напомним, что если $\varphi(x)\in L_1(R^n)$, то $F[\varphi]$ – ограниченная и непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $|\xi|\to\infty$. Заметим, что образ Фурье финитной функции является аналитической функцией. Поэтому ясно, что если преобразование Фурье финитной функции является финитной функцией, то оно равно нулю. Отсюда следует, что преобразование Фурье не является отображением, переводящим функции из D в D. Возникает вопрос о том, что будет, если вместо D рассмотреть $S_\infty(R^n)$?

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ.</u> Преобразование Фурье действует непрерывно из $S_\infty(R^n)$ в $S_\infty(R^n)$.

Иными словами, $F:S_\infty(R^n)\to S_\infty(R^n)$.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Докажем две формулы:

1. $D^\alpha F[\varphi](\xi)=\int_{R^n}\varphi(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}e^{-i(\xi,x)}dx=\int_{R^n}(-ix)^\alpha e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx=F[(-ix)^\alpha\varphi(x)](\xi).$

Так как

$$\int_{R^n} e^{-i(\xi,x)}\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi(x)dx=\int_{R^n} e^{-i(\xi,x)}d\varphi(x)=-\int_{R^n}\varphi(x)de^{-i(\xi,x)}=\int_{R^n}(i\xi)e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx,$$

то следует вторая формула

2. $F[D^\alpha\varphi](\xi)=\int_{R^n} D^\alpha\varphi(x)e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx=(i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi).$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}&1.\ D^\alpha F[\varphi](\xi)=F[(-ix)^\alpha\varphi(x)](\xi);\\&2.\ F[D^\alpha\varphi](\xi)dx=(i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi).\end{aligned}\qquad(2.9.1)$$

Из формул (2.9.1) получим

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)=\xi^\beta F\left[(-ix)^\alpha \varphi(x)\right](\xi)=\frac{1}{i^{|\beta|}}(i\xi)^\beta F\left[(-ix)^\alpha \varphi(x)\right](\xi)=$$

$$=\frac{1}{i^{|\beta|}}F\left[D^\beta(-ix)^\alpha \varphi(x)\right](\xi)=\frac{(-i)^{|\alpha|}}{i^{|\beta|}}F\left[D^\beta(x)^\alpha \varphi(x)\right](\xi).$$

Из последней формулы следует, что существует такая положительная константа $C_{\alpha,\beta}$, что будет выполнено неравенство:

$$\left|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)\right|\le \int_{R^n}\left|D^\beta\left(x^\alpha \varphi\right)\right|dx=C_{\alpha,\beta}.$$

Из последнего неравенства следует, что $F[\varphi]\in S_\infty(R^n)$. Таким образом, мы доказали, что преобразование Фурье переводит функции из S_∞ в функции из S_∞.

Непрерывность преобразования Фурье означает, что если $\varphi_k\to\varphi$ в $S_\infty(R^n)$, то $F[\varphi_k]\to F[\varphi]$. Пусть $\varphi_n\to 0$ в $S_\infty(R^n)$. Докажем, что $F[\varphi_n]\to 0$ в $S_\infty(R^n)$, иными словами: пусть для любых α и β верно, что $x^\beta D^\alpha\varphi_k(x)\rightrightarrows 0$, тогда

$$\left|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)\right|\le\int_{R^n}\left|D^\beta x^\alpha\varphi_k\right|dx\le \sup_{x\in R^n}\left|D^\beta\left[x^\alpha\varphi_k\right](1+|x|)^{n+1}\right|\int_{R^n}\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}dx\Rightarrow 0.$$

Утверждение доказано.

2.10. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Ясно, что если $F[f]$ – абсолютно интегрируемая функция, то

$$(F[f],\varphi)=\int_{R^n}F[f](\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_{R^n}\left[\int_{R^n}e^{-i(\xi,x)}f(x)dx\right]\varphi(\xi)d\xi=\int_{R^n}f(x)\left[\int_{R^n}e^{-i(\xi,x)}\varphi(\xi)d\xi\right]dx=$$

$$=\int_{R^n}f(x)F[\varphi](x)dx.$$

Окончательно имеем

$$(F[f],\varphi)=(f,F[\varphi]). \qquad (2.10.1)$$

Возьмем формулу (2.10.1) за основу для определения преобразования Фурье для обобщенной функции медленного роста.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ.* Преобразованием Фурье обобщенной функции медленного роста $f\in S'_\infty$ называется функционал $F[f]$, такой, что для $\forall\varphi\in S_\infty(R^n)$ будет выполнено равенство:**

$$(F[f],\varphi)=(f,F[\varphi]).$$

***ТЕОРЕМА.* Оператор Фурье действует непрерывно из S'_∞ в S'_∞.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Линейность функционала $F[f]$ очевидна. Докажем его непрерывность.

Так как $F[\varphi]\in S'_\infty$, то $(f,F[\varphi])$ – линейный непрерывный функционал. Пусть последовательность $\varphi_k\to\varphi$ при $k\to\infty$ в $S_\infty(R^n)$. Тогда $F[\varphi_k]\to F[\varphi]$ и, т. к. $f\in S'_\infty$, то $(f,F[\varphi_k])\to(f,F[\varphi])$.

Последнее равенство можно переписать в виде:

$$(F[f],\varphi_k)=(f,F[\varphi_k])\to(f,F[\varphi])=(F[f],\varphi).$$

Отсюда следует непрерывность функционала $F[f]$.

Таким образом, мы доказали, что образ Фурье функции $F[f]:\forall f\in S'_\infty$ также принадлежит S'_∞.

Теперь докажем, что F является непрерывным оператором, действующим из S'_∞ в S'_∞. Действительно, пусть последовательность функций $f_k\to f$ в S'_∞, тогда покажем, что $F[f_k]\to F[f]$. Ясно, что

$$\forall\varphi\in S_\infty,\ (F[f_k],\varphi)=(f_k,F[\varphi])\to(f,F[\varphi])=(F[f],\varphi).$$

Окончательно получили, что если $f_k\to f$ в S'_∞, то $(F[f_k],\varphi)\to(F[f],\varphi)$.

Теорема доказана.

2.11. Обратное преобразование Фурье обобщенных функций

Как известно, для функций $\varphi(\xi)\in S_\infty$ обратное преобразование Фурье определяется по формуле $F^{-1}[\varphi]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}e^{i(\xi,x)}\varphi(\xi)d\xi$. Эту формулу можно переписать в виде:

$$F^{-1}[\varphi](x)=\frac{1}{(2\pi)^n}F[\varphi(-\xi)],\quad \varphi\in S'_\infty. \qquad (2.11.1)$$

Возьмем формулу (2.11.1) за основу для определения обратного преобразования Фурье для обобщенной функции медленного роста.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Обратным преобразованием Фурье функции называется линейный непрерывный функционал $F^{-1}:S'_\infty\to S'_\infty$, ***такой, что***

$$F^{-1}[f](x)=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-\xi)].$$

Корректность определения очевидна.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ</u>. Оператор $F^{-1}:S'_\infty\to S'_\infty$ ***является обратным к оператору*** $F:S'_\infty\to S'_\infty$.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Для того, чтобы доказать утверждение, докажем, что

$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f. \qquad (2.11.2)$$

Из определения обратного преобразования Фурье следует, что

$$\left(F^{-1}[F[f]],\varphi\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\left(F[F[f](-\xi)],\varphi\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\left(F[f](-\xi),F[\varphi](\xi)\right)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\left(F[f](\xi),F[\varphi](-\xi)\right)=\left(F[f],F^{-1}[\varphi]\right)=\left(f,F\left[F^{-1}[\varphi]\right]\right)=(f,\varphi).$$

С другой стороны,

$$(f,\varphi)=\left(f,F^{-1}[F[\varphi]]\right)=\left(F^{-1}[f],F[\varphi]\right)=\left(F\left[F^{-1}[f]\right],\varphi\right).$$

Таким образом, формула (2.11.2) доказана.

Это означает, что оператор $F:S'_\infty\to S'_\infty$ обратим, и так как он непрерывен, то осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение в S'_∞. А значит, мы показали, что оператор Фурье является изоморфизмом.

Далее выведем несколько полезных свойств преобразования Фурье обобщенных функций.

Пусть $f\in S'_\infty$, докажем, что

$$D^\alpha F[f](\xi)=F\left[(-ix)^\alpha f\right](\xi); \qquad (2.11.3)$$
$$F\left[D^\alpha f\right](\xi)=(i\xi)^\alpha F[f](\xi). \qquad (2.11.4)$$

Мы уже доказали эти формулы для функций из пространства Шварца. Пусть теперь $f\in S'_\infty$, тогда

$$(D^\alpha F[f],\varphi(\xi))=(-1)^{|\alpha|}\left(F[f](\xi),D^\alpha\varphi(\xi)\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(f(x),F\left[D^\alpha\varphi\right](x)\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(f,(ix)^\alpha F[\varphi]\right)=$$
$$=\left((-ix)^\alpha f,F[\varphi]\right)=\left(F\left[(-ix)^\alpha f\right],\varphi\right).$$

Формула (2.11.3) доказана.

Докажем формулу (2.11.4):

$$(F\left[D^\alpha f\right](\xi),\varphi(\xi))=(D^\alpha f,F[\varphi])=(-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha F[\varphi](x))=(-1)^{|\alpha|}(f,F\left[(-i\xi)^\alpha\varphi\right])=$$
$$=(-1)^{|\alpha|}(F[f],(-i\xi)^\alpha\varphi)=((i\xi)^\alpha F[f],\varphi).$$

Из последнего равенства и следует формула (2.11.4).

2.12. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем

Обозначим через $\Theta_M\left(R^n\right)$ множество функций, принадлежащих $C^\infty\left(R^n\right)$ и имеющих вместе со всеми своими производными не более чем полиномиальный рост на бесконечности.

ТЕОРЕМА 2.12.1. ***Если f – финитная обобщенная функция, то ее преобразование Фурье принадлежит классу Θ_M и имеет представление***

$$F[f](\xi)=\left(f(x),\eta(x)e^{i(\xi,x)}\right), \qquad (2.12.1)$$

где η – любая функция из D, равная 1 в окрестности носителя f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Учитывая равенства (2.11.4) для любых $\varphi\in S_\infty$, имеем

$$\left(\partial^\alpha F[f],\varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(F[f],\partial^\alpha\varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(f,F[\partial^\alpha\varphi]\right)==(-1)^{|\alpha|}\left(f(x),\eta(x)(-ix)^\alpha F[\varphi](x)\right)=$$
$$=\left(f(x),\int\eta(x)(ix)^\alpha\varphi(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi\right)$$

Замечая теперь, что
$$\eta(x)(ix)^\alpha\varphi(\xi)e^{i(x,\xi)}\in S_\infty(R^{2n}),$$
и пользуясь формулой (2.4.10), получаем
$$\left(f(x),\int\eta(x)(ix)^\alpha\varphi(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi\right)=\int\left(f(x),\eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi,x)}\right)\varphi(\xi)d\xi.$$
Далее, из предыдущего равенства выводим равенство
$$\left(\partial^\alpha F[f],\varphi\right)=\int\left(f(x),\eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi,x)}\right)\varphi(\xi)d\xi,$$

из которого вытекает, что
$$\partial^\alpha F[f](\xi)=\left(f(x),\eta(x)(ix)^\alpha\varphi(\xi)e^{i(\xi,x)}\right)\qquad(2.12.2)$$
При $\alpha=0$ получим формулу (2.12.1).

Из представления (2.12.2) следует, что $\partial^\alpha F[f](\xi)\in C(R^n)$, так что $F[f]\in C^\infty(R^n)$.

Далее, по теореме 2.8.1, существуют $C>0$ и целое $p\geq 0$, такие, что справедливо неравенство (2.12.2). Применяя это неравенство к правой части равенства (3.5.2), получим оценку
$$\left|\partial^\alpha F[f](\xi)\right|=\left|\left(f(x),\eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi,x)}\right)\right|\leq C\left\|\eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi,x)}\right\|_p=$$
$$=C\sup_{|\beta|\leq p,x\in R^n}\left|(1+|x|)^p\partial_x^\beta\left[\eta(x)x^\alpha e^{i(\xi,x)}\right]\right|\leq C_\alpha\left(1+|\xi|\right)^p$$

для всех $\xi\in R^n$. Отсюда следует, что $F[f]\in\Theta_M$.

Теорема доказана.

2.13. Преобразование Фурье свертки

Пусть $f\in S'_\infty$, g – финитная обобщенная функция. Тогда
$$F[f*g]=F[f]F[g].\qquad(2.13.1)$$
Здесь операция умножения функций $F[f]$ и $F[g]$ понимается как умножение функции $F[f]$, которая принадлежит классу Θ_M, и обобщенной функции $F[g]$.
В силу (2.4.10) свертка $f*g$ принадлежит S'_∞ и представляется в виде:
$$(f*g,\varphi)=\left(f(x),\left(g(y),\eta(y)\varphi(x+y)\right)\right),\quad\varphi\in S_\infty,$$
где $\eta\in D$, $\eta=1$ в окрестности носителя g, Учитывая это представление, для всякой $\varphi\in S_\infty$ имеем
$$\left(F[f*g],\varphi\right)=\left(f*g,F[\varphi]\right)=\left(f(x),\left(g(y),\eta(y)\int\varphi(\xi)e^{i(x+y,\xi)}d\xi\right)\right)$$
Принимая во внимание, что по теореме 2.12.1 $F[g]\in\Theta_M$, и пользуясь формулой (2.12.1), преобразуем полученное равенство:
$$\left(F[g*g],\varphi\right)=\left(f(x),\int\left(g(y),\eta(y)e^{i(y,\xi)}\right)e^{i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)=\left(f(x),\int F[g](\xi)\varphi(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi\right)=$$
$$=\left(f,F[F[g]\varphi]\right)=\left(F[f],F[g]\varphi\right)=\left(F[g]F[f],\varphi\right),$$
откуда и вытекает формула (2.13.1).

<u>*ПРИМЕР 2.13.1.*</u> Найдем преобразование Фурье δ-функции:

$$(F[\delta](\xi),\varphi(\xi))=(\delta(x),F[\varphi](\xi))=\left(\delta(x),\int\limits_{R^n}e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx\right)=\int\limits_{R^n}\varphi(x)dx=(1,\varphi(\xi)).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$F[\delta]=1. \qquad (2.13.2)$$

ПРИМЕР 2.13.2. Найдем

Из формулы (2.13.2) следует, что

$$F^{-1}[1]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[1]=\delta. \quad (2.13.3)$$

Иными словами, мы получили, что

$$F[1]=(2\pi)^n\delta. \qquad (2.13.4)$$

С другой стороны,

$$(F[1],\varphi(\xi))=\left(1,\int\limits_{R^n}e^{-i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)=\int\limits_{R^n}\left(\int\limits_{R^n}e^{-i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{R^n}\varphi(\xi)\int\limits_{B_R}e^{-i(x,\xi)}dxd\xi.$$

Здесь через B_R обозначен шар радиуса R в R^n. Из формулы (2.13.3) следует, что

$$(F[1],\varphi(\xi))=(2\pi)^n\varphi(0).$$

Таким образом, имеем $\left(\lim_{R\to\infty}\int\limits_{B_R}e^{-i(x,\xi)}dx,\varphi(\xi)\right)=\left(\int\limits_{R^n}e^{-i(x,\xi)}dx,\varphi(\xi)\right)=(2\pi)^n\varphi(0).$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{R^n}e^{-i(x,\xi)}dx=(2\pi)^n\delta(\xi). \qquad (2.13.5)$$

Заметим, что в последней формуле сингулярный интеграл $\int\limits_{R^n}e^{-i(x,\xi)}dx$ понимается в смысле обобщенных функций.

И из формулы (2.13.3) следует

$$\left(F^{-1}[1],\varphi(\xi)\right)=\left(1,\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}e^{i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\left(\int\limits_{R^n}e^{i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)dx=\varphi(0).$$

Отсюда, рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$\int\limits_{R^n}e^{i(x,\xi)}dx=(2\pi)^n\delta(\xi). \quad (2.13.6)$$

ПРИМЕР 2.13.3. Найдем преобразование Фурье функции $\delta^{(n)}$. Так как $F[D^\alpha f](\xi)=(i\xi)^\alpha F[f](\xi)$ и $F[\delta]=1$, то

$$F[D^\alpha\delta](\xi)=(i\xi)^\alpha F[\delta]=(i\xi)^\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$F\left[\delta^{(\alpha)}\right]=i^{|\alpha|}\xi^\alpha. \qquad (2.13.7)$$

ПРИМЕР 2.13.4. Найдем

Из формулы $D^\alpha F[f](\xi)=F[(-ix)^\alpha f](\xi)$ и того, что $F[1]=(2\pi)^n\delta$, следует, что

$$F[(-ix)^{\alpha}\cdot 1](\xi)=D^{\alpha}F[1](\xi)=(2\pi)^{n}\delta^{\alpha}(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$F[x^{\alpha}](\xi)=(2\pi)^{n}i^{|\alpha|}\delta^{\alpha}(\xi). \qquad (2.13.8)$$

Из формулы (2.13.8) можно получить следующий результат:

$$\left(F[x^{\alpha}],\varphi(\xi)\right)=\left(x^{\alpha},\int_{R^n}e^{-i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)=\int_{R^n}x^{\alpha}\left(\int_{R^n}e^{-i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{R^n}\varphi(\xi)\int_{B_R}e^{-i(x,\xi)}x^{\alpha}dx.$$

Из формулы (2.13.8) следует, что $\left(F[x^{\alpha}],\varphi(\xi)\right)=(2\pi)^{n}i^{|\alpha|}\varphi^{\alpha}(0)$.

Таким образом, мы имеем

$$\left(\lim_{R\to\infty}\int_{B_R}e^{-i(x,\xi)}x^{\alpha}dx,\varphi(\xi)\right)=\left(\int_{R^n}e^{-i(x,\xi)}x^{\alpha}dx,\varphi(\xi)\right)=(2\pi)^{n}i^{|\alpha|}\varphi^{\alpha}(0).$$

Отсюда следует формула

$$\int_{R^n}e^{-i(x,\xi)}x^{\alpha}dx=i^{|\alpha|}(2\pi)^{n}\delta^{(\alpha)}(\xi). \qquad (2.13.9)$$

3. ПРОСТРАНСТВО СОБОЛЕВА

В этой главе определяется преобразование Фурье в пространстве $L_2(R^n)$, дается определение классических пространств Соболева $W_s^k(R^n)$, $s \in N, k \in N$ и пространств Соболева $H^s(R^n)$, $s \in R$, которые являются обобщением классических пространств Соболева. В шкале пространств Соболева определяются операторы дифференцирования, ограничения и коограничения, которые важны для дальнейшего изложения, и доказывается их непрерывность. Также в этой главе доказываются основные теоремы вложения.

3.1. Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ.* Пополнением пространства Шварца по норме**

$$\|u\|_{L_2}^2 = \int_{R^n} |u(x)|^2 dx$$

***называется* $L_2(R^n)$.**

ТЕОРЕМА 3.1.1. (Планшереля).

Для всякой функции* $f \in L_2(R^n)$ *интеграл

$$g_N(\lambda) = \int_{B_N} f(x) e^{-i(\lambda,x)} dx$$

при любом* N *представляет собой функцию от* λ*, принадлежащую к* $L_2(R^n)$*. При* $N \to \infty$ *функции* g_N *сходятся в метрике пространства* L_2 *к некоторому пределу* g*, причем

$$\int_{R^n} | g(\lambda) |^2 \, d\lambda = (2\pi)^n \int_{R^n} | f(x) |^2 \, dx. \quad \textbf{(3.1.1)}$$

Эту функцию* g *называют преобразованием Фурье функции* $f \in L_2$*. Если* f *принадлежит также и к* $L_1(R^n)$*, то соответствующая функция* g *совпадает с преобразованием Фурье функции* f *в обычном смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Основная идея доказательства состоит в том, что равенство (3.1.1) устанавливается для функций, принадлежащих классу S_∞ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций, которые всюду плотны в $L_2(-\infty,\infty)$, а потом распространяется по непрерывности на все $L_2(-\infty,\infty)$.

Реализуем теперь эту идею в деталях. Сначала докажем непрерывность преобразования Фурье в $L_2(R^n)$.

1) Пусть теперь f – произвольная функция из $L_2(R^n)$, обращающаяся в нуль вне некоторого шара $|x|<a$. Тогда f интегрируема в шаре $|x|<a$ (т.е. принадлежит $L_1(B_a)$), а следовательно, и во всем R^n. Поэтому для нее определено преобразование Фурье

$$g(\lambda)=\int\limits_{R^n} f(x)e^{-i(\lambda,x)}dx.$$

Пусть теперь $\{f_n\}$ – последовательность функций из S_∞, обращающихся в нуль вне шара B_a, сходящаяся по норме пространства $L_2(R^n)$ к f. Поскольку f и все f_n отличны от нуля лишь на ограниченном множестве, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f и по норме пространства $L_1(R^n)$. Поэтому последовательность $\{g_n\}$ сходится к g равномерно в R^n. Кроме того, последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна в $L_2(R^n)$. Действительно $g_n - g_m \in S_\infty$, поэтому в силу уже доказанного

$$\int\limits_{R^n}|g_n(\lambda)-g_m(\lambda)|^2 d\lambda=(2\pi)^n\int\limits_{R^n}|f_n(x)-f_m(x)|^2 dx,$$

откуда и следует фундаментальность последовательности $\{g_n\}$. Значит, эта последовательность сходится в L_2, причем к той же самой функции g, к которой она сходится равномерно. Поэтому в равенстве

$$\|f_n\|^2=\frac{1}{(2\pi)^n}\|g_n\|^2$$

можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Таким образом, получаем, что равенство (3.1.1) справедливо для каждой $f\in L_2$, обращающейся в нуль вне некоторого шара.

2) Пусть, наконец, f – произвольная функция из L_2. Положим

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & при\ |x|\le N,\\ 0, & при\ |x|>N.\end{cases}$$

Ясно, что

$$\|f-f_N\|\to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Функция f_N принадлежит $L_1(R^n)$, следовательно, для нее существует обычное преобразование Фурье. Оно равно

$$g_N(\lambda)=\int\limits_{R^n} f_N(x)e^{-i(\lambda,x)}dx=\int\limits_{B_N} f(x)e^{-i(\lambda,x)}dx.$$

Поскольку в силу пункта 1 наших рассуждений

$$\|f_N-f_M\|^2=\frac{1}{(2\pi)^n}\|g_N-g_M\|^2,$$

функции g_N сходятся в L_2 к некоторому пределу, который мы обозначим g. Поэтому в равенстве

$$\|f_N\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N\|^2$$

можно перейти к пределу при $N \to \infty$, откуда получаем соотношение (3.1.1) для произвольной $f \in L_2(R^n)$. Первая часть теоремы Планшереля доказана.

Если теперь функция f принадлежит как $L_2(R^n)$, так и $L_1(R^n)$, то для нее существует преобразование Фурье

$$\tilde{g}(\lambda) = \int\limits_{R^n} f(x)e^{-i(\lambda,x)}dx,$$

понимаемое в обычном смысле. При этом функции f_N сходятся к f в $L_1(R^n)$, и, значит, их преобразования Фурье g_N сходятся к $\tilde{g}$ равномерно. Но, кроме того, как мы установили, функции g_N сходятся в метрике $L_2(R^n)$ к некоторому пределу, который мы обозначили как g. Отсюда следует, что $\tilde{g}$ совпадает с g.

<u>ТЕОРЕМА 3.1.1</u>. Преобразование Фурье переводит $L_2(R^n)$ ***в*** $L_2(R^n)$ ***и***

$$\|f(x)\|_{L_2(R^n)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|F[f(x)]\|_{L_2(R^n)}. \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Докажем теорему сначала для функций, принадлежащих пространству Шварца. Пусть $f_1(x) \in S_\infty$, $f_2(x) \in S_\infty$, обозначим через $g_1(\xi) = F[f_1](\xi)$, $g_2(\xi) = F[f_2](\xi)$.

$$\int\limits_{R^n} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\Big(\int\limits_{R^n} e^{i(\xi,x)}g_1(\xi)d\xi\Big)\overline{f_2(x)}dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} g_1(\xi)\overline{\Big(\int\limits_{R^n} e^{-i(\xi,x)}f_2(x)dx\Big)}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} g_1(x)\overline{g_2(x)}dx.$$

Положив $f_1(x) = f_2(x)$, получим формулу (3.1.2). Таким образом, мы доказали формулу (3.1.2) для функций, принадлежащих пространству Шварца. Но в силу того, что пространство Шварца является всюду плотным в $L_2(R^n)$, а преобразование Фурье является непрерывным оператором, эта формула верна и в $L_2(R^n)$. Теорема доказана.

Заметим, что если задать прямое и обратное преобразование Фурье формулами

$$F[\varphi] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{R^n} e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx,$$

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}F[f(-x)],$$

то преобразование Фурье являлось бы унитарным преобразованием $L_2(R^n)$.

3.2. Пространства Соболева. Основные определения

Обозначим $\hat{u}(\xi) = F[u(x)]$, где $F[u(x)]$ -- преобразование Фурье функции $u(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространством Соболева $H^s(R^n)$ называется пополнение пространства Шварца по норме

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{R^n} \left| \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \right|^2 d\xi.$$

Таким образом, пространству Соболева принадлежат те и только те функции, для которых

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L_2(R^n).$$

Скалярное произведение в $H^s(R^n)$ определяется по формуле:

$$(u,v)_{H_s} = \int_{R^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi. \qquad (3.2.1)$$

Если $s \in N$, то можно определить пространство Соболева следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство Соболева $W_s^2(R^n)$ состоит из таких функций $u \in L_2(R^n)$, что $\partial^\alpha u \in L_2(R^n)$ при $|\alpha| \le s$ и

$$(u,v)_{W_s^2} = \sum_{|\alpha|\le s} \left(\partial^\alpha u, \partial^\alpha v\right)_{L_2},$$

$$\|u\|_{W_s^2} = (u,u)_{W_s^2}^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{|\alpha|\le s} \int_{R^n} \left|\partial^\alpha u(x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\le s} \left\|\partial^\alpha u(x)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\sum_{|\alpha|\le s} \left\|\xi^\alpha \hat{u}(\xi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

СВОЙСТВО. $W_{s_1}^2(R^n) \subset W_{s_2}^2(R^n)$ ***при*** $s_1 \ge s_2$.

Очевидно, что существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что выполнено неравенство:

$$C_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \le \sum_{0\le|\alpha|\le s} \left|\xi^\alpha\right| \le C_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}.$$

Отсюда следует, что норма W_s^2 эквивалентна норме (3.2.1).

Заметим, что если в определении пространства Соболева $W_s^2(R^n)$ заменить $L_2(R^n)$ на $L_p(R^n)$, то мы получим определение пространства $W_s^p(R^n)$. А именно *пространство $W_s^p(R^n)$ состоит из таких функций $u \in L_p(R^n)$, что $\partial^\alpha u \in L_p(R^n)$ при $|\alpha| \le s$ и*

$$\|u\|_{W_s^p} = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \left\| \partial^\alpha u(x) \right\|^p_{L_p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ТЕОРЕМА 3.2.1. *$H^s(R^n)$ **является гильбертовым пространством.***

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\hat{u}(\xi) \in H^s(R^n)$, тогда определено биективное отображение, сохраняющее операцию $\varphi : H^s(R^n) \to L_2(R^n), \varphi\hat{u} = \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}$. Ясно, что $\varphi(\alpha\hat{u}_1 + \beta\hat{u}_2) = \alpha\varphi\hat{u}_1 + \beta\varphi\hat{u}_2$. Кроме того, очевидно, что

$$(u,u)_{H^s} = \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}, \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \right)_{L_2} = (\varphi\hat{u}, \varphi\hat{u})_{L_2}.$$

Отсюда следует, что $H^s(R^n) \cong L_2(R^n)$. Теорема доказана.

Заметим, что норму в пространстве $W_s^2(R^n)$ можно было определить по формуле:

$$\|u\|_{W_s^2} = \sum_{|\alpha| \le s} \left(\int_{R^n} \left| \partial^\alpha u(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{|\alpha| \le s} \left\| \partial^\alpha u(x) \right\|_{L_2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \le s} \left\| \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \right\|_{L_2}.$$

Легко показать, что эта норма также эквивалентна нормам, введенным выше.

Очевидно, что пространство Соболева $H^s(R^n)$ мы можем рассматривать как пространство обобщенных функций над собой. А именно, действие обобщенной функции $u \in \left(H^s(R^n)\right)^*$ на функцию $v \in H^s(R^n)$ определяется с помощью скалярного произведения в $H^s(R^n)$по формуле:

$$(u,v) = (u,v)_{H^s}. \qquad (3.2.2)$$

Таким образом, мы можем рассматривать пространство H^s как пространство обобщенных функций над собой. Кроме того, любой линейный непрерывный функционал представим в виде (3.2.2).

Еще один подход к реализации обобщенных функций над пространством H^s заключается в следующем. Мы можем рассмотреть двойственность пространств H^s и H^{-s} в том смысле, что для функций $u \in H^s$, $v \in H^{-s}$ определена форма

$$(u,v) = \int_{R^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

Действительно,

$$|(u,v)|^2 = \left| \int_{R^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi \right|^2 = \left| \int_{R^n} \hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \overline{\hat{v}(\xi)} \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}} d\xi \right|^2 \le$$

$$\le \int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi \int_{R^n} |\hat{v}(\xi)|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} d\xi = \|u\|^2_{H^s} \|v\|^2_{H^{-s}}.$$

ТЕОРЕМА 3.2.2. ***При любом s линейный непрерывный функционал $f(u)$ над H^s может быть представлен в виде***

$$f(u) = (u, v)_0,$$

где $v \in H^{-s}(R^n)$ однозначно определяется по f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Возьмем линейный непрерывный функционал $f \in H^{s^*}$.

Положим $u \in H^s(R^n)$, обозначим $u_1 = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} Fu$. Очевидно, что $u_1 \in L_2(R^n)$. Обозначим $g(u_1) = f(u)$ – линейный непрерывный функционал на $L_2(R^n)$. Он представим в виде $g(u_1) = \int \hat{u}_1(\xi)\overline{\hat{v}_1(\xi)}d\xi$, где элемент $\hat{v}_1(\xi) \in L_2(R^n)$ однозначно определяется по f. Тогда получим

$$g(u_1) = \int (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}_1(\xi)}d\xi.$$

Отсюда

$$f(u) = (u, v)_0,$$

где $\hat{v} = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{v}_1(\xi) \in H^{-s}$.

Теорема доказана.

Таким образом, мы можем рассматривать функции из пространства Соболева $H^s(R^n)$ в качестве обобщенных функций над различными пространствами основных функций. К примеру, за пространство основных функций мы можем взять и $H^\infty(R^n)$.

ПРИМЕР

Найдем индекс пространств Соболева s, таких, что $\delta(x) \in H^s(R^n)$.

Так как $F[\delta] = 1$ (см. (2.13.2)), то

$$\|\delta(x)\|^2_{H^s} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\|F[\delta(x)]\|^2_{H^s} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\|1\|^2_{H^s} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int (1+|\xi|^2)^s d\xi = k\int (1+R^2)^s R^{n-1}dR. \quad (3.2.3)$$

Здесь через k обозначена некоторая константа. Необходимым и достаточным условием сходимости последнего интеграла является неравенство:

$$s < -\frac{n}{2}.$$

Окончательно получили $\delta \in H^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}(R^n)$, $\forall \varepsilon > 0$.

ЗАДАЧА. *Пусть n = 3. Определить точную верхнюю грань индексов пространств Соболева, которым принадлежит функция $\frac{1}{r}$.*

Заметим, что из теоремы 2.12.1 следует, что для любой обобщенной функции $f \in S'(R^n)$ с компактным носителем существует такое $s \in R$, что $f \in H^s(R^n)$.

3.3. Теоремы вложения

Возникает вопрос о том, как связаны индекс пространства Соболева, которому принадлежит функция, и этой функции гладкость. На вопрос отвечают теоремы вложения, приведенные в данной главе.

<u>ТЕОРЕМА 3.3.1</u>. Если $s > \frac{n}{2}$, ***то функции*** $u(x) \in H^s(R^n)$ ***ограничены и непрерывны.***

Заметим, что здесь и ниже свойства ограниченности и непрерывности выполнены на R^n с точностью до множества меры нуль.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>
Очевидно, достаточно доказать, что $\hat{u}(\xi) \in L_1(R^n)$. Это следует из известного факта о том, что прообраз Фурье функции из $L_1(R^n)$ является ограниченной непрерывной функцией, стремящейся к нулю на бесконечности. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что выполнено равенство:

$$\int |\hat{u}(\xi)| d\xi = \int |\hat{u}(\xi)| \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}} d\xi \le \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.1)$$

Интеграл $\int \left(1+|\xi|^2\right)^{s} d\xi = S\int \left(1+R^2\right)^{s} R^{n-1} dR$ сходится при выполнении условия

$$s > \frac{n}{2}.$$

Теорема доказана.

<u>СЛЕДСТВИЕ.</u> Если $s > \frac{n}{2} + k$, ***то*** $H^s(R^n) \subset C^k(R^n)$.

Обобщением полученных результатов является теорема вложения С. Л. Соболева. Для формулировки этой теоремы нам необходимо ввести банахово пространство $C_b^k(R^n)$, состоящее из функций, принадлежащих пространству $C^k(R^n)$, у которых все производные порядка меньше или равных k ограничены при $x \in R^n$. Норма в этом пространстве задается формулой:

$$\|u\|_{(k)} = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in R^n} |D^\alpha u(x)|. \quad (3.3.2)$$

<u>ТЕОРЕМА 3.3.2.</u> Если $s > \frac{n}{2} + k$, ***то имеет место вложение*** $H^s(R^n) \subset C_b^k(R^n)$, ***причем оператор вложения непрерывен.***

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ясно, что
$$\left|\partial^\alpha u(x)\right| \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \left|\xi^\alpha \hat{u}(\xi)\right| d\xi.$$

Из формулы (3.3.2) следует, что для некоторой положительной константы C будет выполнено неравенство:
$$\|u\|_{(k)} \le C\int \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \left|\hat{u}(\xi)\right| d\xi.$$

Аналогично формуле (3.3.1) с помощью неравенства Коши-Буняковского получим оценку:
$$\|u\|_{(k)} \le C\int \left|\hat{u}(\xi)\right| \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}-\frac{s}{2}} d\xi \le C\left(\int \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left(1+|\xi|^2\right)^{k-s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.3)$$

Так как $-\frac{n}{2} > k-s,$ то первый интеграл в неравенстве (3.3.3) сходится.

Обозначим его через C_1, тогда неравенство (3.3.3) можно переписать в виде:
$$\|u\|_{(k)} \le \overline{C}\|u\|_{H^s}. \quad (3.3.4)$$

Здесь $\overline{C} = CC_1$. Таким образом, мы доказали, что существует оператор вложения $i : H^s(R^n) \to C_b^k(R^n)$, $iu(x) = u_1(x)$. Здесь функции $u(x)$ и $u_1(x)$ совпадают почти всюду, поэтому из неравенства (3.3.4) следует ограниченность оператора i. Теорема доказана.

3.4. Некоторые операторы, действующие непрерывно в шкале пространств Соболева

Широкое применение пространств Соболева в функциональном анализе и теории дифференциальных уравнений обусловлено тем, что многие операторы, такие как оператор дифференцирования, операторы умножения на некоторые функции, операторы ограничения и коограничения, действуют непрерывно в шкале пространств Соболева.

ПРИМЕР 3.4.1. Оператор дифференцирования:
$$D = \sum_{|\alpha|=0}^{k} a_\alpha(x) D^\alpha. \qquad (3.4.1)$$

***ТЕОРЕМА 3.4.1.* Оператор дифференцирования $D : H^s(R^n) \to H^{s-|\alpha|}(R^n)$ действует непрерывно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Докажем, что если $u(x) \in H^s(R^n)$, то $Du(x) \in H^{s-k}(R^n)$ и $\exists C > 0 : \|Du\|_{H^{s-k}} < C\|u\|_{H^s}$.

Пусть $u \in H^s(R^n)$, тогда найдется такая константа $C > 0$, что выполняется неравенство:

$$\|Du\|^2_{H^{s-k}} \le C\int\limits_{R^n}\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s-k}{2}}|\xi|^k\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi <$$

$$< C\int\limits_{R^n}\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s-k}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi = C\int\limits_{R^n}\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi = C\|u\|_{H^s}.$$

Отсюда следует непрерывность оператора дифференцирования (3.4.1).
Теорема доказана.

ПРИМЕР 3.4.2. Операторы умножения на функции.

ТЕОРЕМА 3.4.2. Пусть $a(x)\in H^{2s}\left(R^n\right)$***, причем*** $s>\frac{n}{2}$***, тогда оператор умножения на функцию*** $a(x)$ ***действует непрерывно в пространстве*** $H^s\left(R^n\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
Обозначим через $\hat{a}(p)$ и $\hat{u}(q)$ обратные преобразования Фурье функций $a(x)$ и $u(x)$ соответственно. Пусть $u(x)\in H^s\left(R^n\right)$, тогда, как было показано выше, $\hat{u}(p)\in L_1(R^n),\ \hat{a}(p)\in L_1(R^n)$, поэтому определена свертка этих функций, и верно, что

$$a(x)u(x) = F\left[\int \hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq\right](x).$$

Из последнего равенства следует, что

$$\|a(x)u(x)\|^2_{H^s} = \int\left(1+p^2\right)^s F^{-1}[a(x)u(x)]^2(p)dp = \int\left(1+p^2\right)^s\left(\int \hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq\right)^2 dp =$$

$$= \left\|\int\left(1+p^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq\right\|^2_{L_2}. \qquad (3.4.2)$$

Оценим $\left|\int\left(1+p^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq\right|$ из (3.4.2):

$$\left|\int\left(1+p^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq\right| \le \int \frac{\left(1+p^2\right)^{\frac{s}{2}}}{\left(1+q^2\right)^{\frac{s}{2}}}|\hat{a}(p-q)|\left(1+q^2\right)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(q)|dq \le$$

$$\le 2^{\frac{s}{2}}\int \left(1+|p-q|^2\right)^{\frac{s}{2}}|\hat{a}(p-q)|\left(1+q^2\right)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(q)|dq.$$

Здесь используется неравенство $\frac{\left(1+p^2\right)^{\frac{s}{2}}}{\left(1+q^2\right)^{\frac{s}{2}}} \le 2^{\frac{s}{2}}\left(1+|p-q|^2\right)^{\frac{s}{2}}$. Доказательство этого неравенства приводится ниже в пункте 5.2.

Обозначим $\varphi(p-q) = \left(1+|p-q|^2\right)^{\frac{s}{2}}|\hat{a}(p-q)| \in H^s\left(R^n\right)$ и $g(q) = \left(1+q^2\right)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(q)| \in L_2\left(R^n\right)$.
Так как по условию $s>\frac{n}{2}$, то функция $F[\varphi]$ ограничена почти всюду. Отсюда следует, что для некоторой константы C выполнено неравенство:

$$\|a(x)u(x)\|^2_{H^s} \le 2^{\frac{s}{2}} \left\| \int \left(1+|p-q|\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{a}(p-q)| \left(1+q^2\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(q)| dq \right\|_{L_2} =$$

$$= \left\| F \int \left(1+|p-q|\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{a}(p-q)| \left(1+q^2\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(q)| dq \right\|_{L_2} = \|F[\varphi]F[g]\|_{L_2} \le C^2 \|F[g]\|_{L_2} =$$

$$= C^2\|g\|_{L_2} = C^2\|u\|_{H^s}.$$

Окончательно получили неравенство:

$$\|a(x)u(x)\|^2_{H^s} \le C^2\|u\|_{H^s}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что если функция $u(x) \in H^{s_0}(R^n)$, где $0 \le s_0 \le 2s$, и, как и ранее, $a(x) \in H^{2s}(R^n)$, причем $s > \frac{n}{2}$, то функция $\int \hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq$ принадлежит $L_2(R^n)$. Докажем это.

$$\int \hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\int e^{-i(p-q,x)} a(x)\hat{u}(q)dxdq = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\int e^{i(q,x)}\hat{u}(q)dq\, a(x)e^{-i(p,x)}dx =$$

$$= \int e^{-i(p,x)}u(x)a(x)dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F[u(x)a(x)].$$

Так как $\|u(x)a(x)\|_{L_2} < C\|a(x)\|_{L_2}$, то и $\int \hat{a}(p-q)\hat{u}(q)dq$ принадлежит $L_2(R^n)$. Поэтому свертка функций $u(x) \in H^{s_0}(R^n)$ и $a(x) \in H^{2s}(R^n)$ определена, и в этом случае и доказательство утверждения без изменений на него переносится. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ.</u> Пусть $u(x) \in H^{s_0}(R^n)$***, где*** $0 \le s_0 \le 2s$***, и*** $a(x) \in H^{2s}(R^n)$***, причем*** $s > \frac{n}{2}$***, тогда оператор умножения на функцию*** $a(x) \in H^{2s}(R^n)$ ***при*** $s > \frac{n}{2}$ ***действует непрерывно в пространстве*** $H^{s_0}(R^n)$***, где*** $0 \le s_0 \le 2s$.

<u>ЗАДАЧА.</u> Пусть k *– натуральное число, а функция* $a(x) \in C_b^k(R^n)$. *Доказать, что оператор умножения на эту функцию действует непрерывно из* $H^k(R^n)$ *в* $H^k(R^n)$.

<u>*ПРИМЕР 3.4.3.*</u> Оператор ограничения.

Обозначим через L плоскость в R^n, $\dim L = m$, $\operatorname{codim} L = n - m = \nu$. Введем систему координат: $x = (x_1, \ldots x_m)$ – координаты вдоль L, $t = (t_1, \ldots t_\nu)$ – координаты в дополнительном подпространстве. Таким образом, $t = 0$ – уравнение L. Вложение $i: L \to R^n$ индуцирует оператор ограничения $i^*: S^\infty(R^n) \to S^\infty(L)$.

ТЕОРЕМА 3.4.3. ***Оператор ограничения*** i^* ***при*** $s>\frac{\nu}{2}$ ***продолжается с*** $S^\infty(R^n)$ ***до непрерывного линейного отображения:***

$$i^*: H^s(R^n) \to H^{s-\frac{\nu}{2}}(L);\qquad \textit{(3.4.3)}$$
$$i^*u(x,t) = u(x,0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $u(x,t)\in H^s(R^n)$. Тогда функцию $u(x,t)$ можно представить в виде:

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{i(px+\tau t)}\hat{u}(p,\tau)dpd\tau.$$

Отсюда следует, что

$$i^*u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^{n-\nu}} e^{ipx}(\int_{R^\nu}\hat{u}(p,\tau)d\tau)dp=\frac{1}{(2\pi)^\nu}\frac{1}{(2\pi)^{n-\nu}}\int_{R^{n-\nu}} e^{ipx}(\int_{R^\nu}\hat{u}(p,\tau)d\tau)dp=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^\nu}F^{-1}(\int_{R^\nu}\hat{u}(p,\tau)d\tau).$$

Найдем индекс пространства Соболева, которому принадлежит функция $i^*u(x,t)$:

$$\left\|i^*u(x,t)\right\|^2_{H^{s_0}} = \int_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^2\right)^{s_0}\left|\int_{R^\nu}\hat{u}(p,\tau)d\tau\right|^2 dp=$$
$$=\int\left(1+|p|^2\right)^{s_0}\left|\int_{R^\nu}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{\frac{s}{2}}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\hat{u}(p,\tau)d\tau\right|^2 dp\le \qquad (3.4.4)$$
$$\le\int\left(1+|p|^2\right)^{s_0}(\int_{R^\nu}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{s}|\hat{u}(p,\tau)|^2 d\tau\int_{R^\nu}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{-s}d\tau)dp.$$

Оценим последний интеграл в (3.4.4)

$$\int_{R^\nu}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{-s}d\tau=\int_{R^\nu}\frac{1}{(1+|p|^2)^s\left(1+\frac{|\tau|^2}{1+|p|^2}\right)^s}d\tau.$$

Перейдем к полярным координатам $|\tau|^2=r^2$.

$$\int_{R^\nu}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{-s}d\tau = S^{\nu-1}\frac{1}{(1+|p|^2)^s}\int_{R^\nu}\frac{r^{\nu-1}dr}{\left(1+(\frac{r}{\sqrt{1+|p|^2}})^2\right)^s}=$$

$$=S^{\nu-1}\frac{1}{(1+|p|^2)^s}\left(\sqrt{1+|p|^2}\right)^\nu\int\frac{\left(\frac{r}{\sqrt{1+|p|^2}}\right)^{\nu-1}d\frac{r}{\sqrt{1+|p|^2}}}{\left(1+(\frac{r}{\sqrt{1+|p|^2}})^2\right)^s}=$$

$$=S^{\nu-1}\frac{1}{(1+|p|^2)^{s-\frac{\nu}{2}}}\int\frac{t^{\nu-1}dt}{\left(1+t^2\right)^s}.$$

Последний интеграл сходится при условии $\nu-1-2s<-1$. Так как по условию теоремы $s>\frac{\nu}{2}$, то это условие выполнено. Обозначим $C=S^{\nu-1}\int\frac{t^{\nu-1}dt}{\left(1+t^2\right)^s}$, тогда

$$\left\|i^*u(x,t)\right\|^2_{H^{s_0}}\le C\int\left(1+|p|^2\right)^{s_0-s+\frac{\nu}{2}}\left(\int_{R^\nu}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^s\left|\hat{u}(p,\tau)\right|^2d\tau\right)dp.$$

Наибольшее значение константы s_0, очевидно, определяется из условия $s_0-s+\frac{\nu}{2}=0$. Отсюда следует, что при $s_0=s-\frac{\nu}{2}$ и имеет место неравенство

$$\left\|i^*u(x,t)\right\|^2_{H^{s-\frac{\nu}{2}}}\le C\left\|u(x,t)\right\|^2_{H^s}.$$

Теорема доказана.

<u>СЛЕДСТВИЕ.</u> Оператор ограничения $i^*:H^s(R^n)\to H^{s-\frac{\nu}{2}}(L)$ ***при*** $s>\frac{\nu}{2}$ ***является непрерывным оператором.***

Возникает вопрос, может ли оператор ограничения действовать непрерывно из пространства $H^s(R^n)$ в $H^{s_0}(L)$ при условии, что $s_0>s-\frac{\nu}{2}$?

На этот вопрос отвечает следующее утверждение.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ.</u> Пусть $i^*:H^s(R^n)\to H^{s_0}(L)$, где $s>\frac{\nu}{2}$ ***является непрерывным оператором, тогда максимальное значение, которое может принимать индекс*** s_0, ***равно*** $s-\frac{\nu}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ясно, что функция вида $\hat{u}(p,\tau)=\dfrac{1}{\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{\frac{s}{2}+\frac{n}{4}+\varepsilon_1}}$ для любого $\varepsilon_1>0$

принадлежит $H^s(R^n)$. Это следует из того, что интеграл

$$\int_{R^n}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^s\left(\frac{1}{\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{\frac{s}{2}+\frac{n}{4}+\varepsilon_1}}\right)^2dpd\tau=\int_{R^n}\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{-\frac{n}{2}-2\varepsilon_1}dpd\tau$$

сходится для любого $\varepsilon_1>0$. Предположим, что существует $\varepsilon>0$, такое, что $i^*u\in H^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}(L)$, тогда $\int\limits_{R^\nu}\hat{u}(p,\tau)d\tau\in H^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}(L)$. То есть интеграл

$\int\limits_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^2\right)^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}\left|\int\limits_{R^\nu}\hat{u}(p,\tau)d\tau\right|^2dp$ сходится. Проверим это.

$$\int_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^2\right)^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}\left|\int_{R^\nu}\hat{u}(p,\tau)d\tau\right|^2dp=\int_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^2\right)^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}\left|\int_{R^\nu}\frac{1}{\left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{\frac{s}{2}+\frac{n}{4}+\varepsilon_1}}d\tau\right|^2dp=$$

$$=\int_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^2\right)^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}\left|\left(1+|p|^2\right)^{-\frac{s}{2}-\frac{n}{4}-\varepsilon_1+\frac{\nu}{2}}\right|^2dp=\int_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^2\right)^{\frac{\nu}{2}+\varepsilon-\frac{n}{2}-2\varepsilon_1}dp=$$

$$=\int_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^2\right)^{\varepsilon-\frac{m}{2}-2\varepsilon_1}dp.$$

Последний интеграл сходится при условии, что $\varepsilon<2\varepsilon_1$. Однако всегда найдется такое $0<\varepsilon_1<\frac{1}{2}\varepsilon$, что этот интеграл будет расходиться. Это означает, что при $0<\varepsilon_1<\frac{1}{2}\varepsilon$ функция $i^*u\notin H^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}(L)$. Иными словами, для $\forall\varepsilon>0$ найдется такая функция $u\in H^s(R^n)$, что $i^*u\notin H^{s-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}(L)$. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Пусть оператор $\hat{A}:H^s(R^n)\to H^\sigma(R^m)$ действует непрерывно при условии $\sigma\le s_0$ и не является непрерывным при $\sigma>s_0$, тогда число, равное $s-s_0$, называется точным порядком оператора A.***

Обозначим точный порядок оператора $\hat{A}$, как $Ord\hat{A}$. Из доказанных утверждений следует теорема.

ТЕОРЕМА 3.4.4. $Ordi^*=\frac{\nu}{2}$.

ПРИМЕР 3.4.4. Оператор коограничения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Спариванием линейных пространств*** E_1 ***и*** E_2 ***называется невырожденный билинейный функционал*** $\varphi: E_1 \times E_2 \to C$.

Определим спаривание пространств Соболева $H^s(R^n)$ и $H^{-s}(R^n)$. Пусть $f(x) \in H^s(R^n)$, $g(x) \in H^{-s}(R^n)$, тогда определим функционал:

$$\rangle f, g \langle = \int_{R^n} f(x) g(x) dx. \qquad (3.4.5)$$

Очевидно, что формула (3.4.5) определяет билинейный непрерывный функционал $\varphi: H^s(R^n) \times H^{-s}(R^n) \to C$. Назовем этот функционал спариванием пространств Соболева $H^s(R^n)$ и $H^{-s}(R^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Оператор*** $A^*: H^{s_1}(R^{n_1}) \to H^{s_2}(R^{n_2})$ ***называется сопряженным к оператору*** $A: H^{-s_2}(R^{n_2}) \to H^{-s_1}(R^{n_1})$ ***относительно спаривания пространств Соболева, если при*** $\forall g(x) \in H^{-s_2}(R^{n_2})$ ***и*** $\forall f(x) \in H^{s_1}(R^{n_1})$ ***выполнено равенство*** $\langle Ag, f \rangle = \langle g, A^* f \rangle$.

ТЕОРЕМА 3.4.4. ***Оператор, сопряженный к оператору***

$$i^*: H^s(R^n) \to H^{s-\frac{\nu}{2}}(R^{n-\nu}),\ s > \frac{\nu}{2},$$

является оператором

$$i_*: H^{-s+\frac{\nu}{2}}(R^{n-\nu}) \to H^{-s}(R^n),$$
$$i_* f(x) = \delta(t) f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $g(x,t) \in H^s(R^n)$, $f(x) \in H^{-s+\frac{\nu}{2}}(R^{n-\nu})$, $s > \frac{\nu}{2}$, тогда

$$\rangle i^* g(x,t), f(x) \langle = \int_{R^{n-\nu}} i^* g(x,t) f(x) dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{R^{n-\nu}} i^* \int_{R^{2\nu}} e^{ip(t-t')} g(x,t') dt' dp f(x) dx =$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{R^{n-\nu}} \int_{R^{2\nu}} e^{-ipt'} g(x,t') dp dt' f(x) dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{R^n} \Big(\int_{R^\nu} e^{-ipt'} dp\Big) g(x,t') dt' f(x) dx. \qquad (3.4.6)$$

Как говорилось выше в (2.13.5), выполнено равенство:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{R^\nu} e^{-ipt'} dp = \delta(t').$$

Из этого равенства и (3.4.6) следует, что

$$\rangle i^* g(x,t), f(x) \langle = \int \delta(t') g(x,t') f(x) dt' dx = \rangle g(x,t), i_* f(x) \langle.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы ввели оператор, сопряженный к оператору ограничения:

$$i_*: H^{-s+\frac{\nu}{2}}(R^{n-\nu}) \to H^{-s}(R^n),\ s > \frac{\nu}{2};$$
$$i_* f(x) = \delta(t) f(x).$$

Назовем оператор i_* оператором коограничения. Ясно, что он является непрерывным линейным оператором при условии, что $s > \frac{\nu}{2}$ и что $\operatorname{Im} i_* \subset H^{-s}(R^n)$. Докажем, что его порядок равен $\frac{\nu}{2}$. Для этого осталось доказать, что $\operatorname{Im} i_* \not\subset H^{-s+\varepsilon}(R^n),\ \forall \varepsilon > 0$.

Пусть $f(x) \in H^{-s+\frac{\nu}{2}}(R^{n-\nu}),\ s > \frac{\nu}{2}$, тогда

$$\|\delta(t)\cdot f(x)\|^2_{H^{-s+\varepsilon}} = \int_{R^n} \left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{-s+\varepsilon} f^2(p)\,d\tau dp.$$

Так как

$$\int_{R^\nu} \left(1+|p|^2+|\tau|^2\right)^{-s+\varepsilon} d\tau = C\left(1+|p|^2\right)^{-s+\frac{\nu}{2}+\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\delta(t)\cdot f(x)\|^2_{H^{-s+\varepsilon}} = \int_{R^n} \left(1+|p|^2\right)^{-s+\varepsilon+\frac{\nu}{2}} f^2(p)\,dp.$$

Последний интеграл расходится при $\forall \varepsilon > 0$.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ.</u> Точный порядок оператора $i_*: H^{-s+\frac{\nu}{2}}(R^{n-\nu}) \to H^{-s}(R^n),\ s > \frac{\nu}{2}$ ***равен*** $\frac{\nu}{2}$.

<u>ЗАДАЧА.</u> $i_*: H^{s_1}(R^{n-\nu}) \to H^{s_2}(R^n), s_1 \geq 0.$

Найти точную верхнюю грань множества индексов пространств Соболева, таких, что этот оператор является ограниченным.

Вычислим норму оператора ограничения:

$$i^*: H^s(R^n) \to H^{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1}),$$
$$i^* u(x,t) = u(x,0).$$

<u>ТЕОРЕМА 3.4.5.</u> Норма оператора $i^*: H^s(R^n) \to H^{s-\frac{\nu}{2}}(R^{n-\frac{\nu}{2}}),\ s > \frac{\nu}{2}$ ***равна*** $\frac{1}{(2\pi)^\nu}\sqrt{K^\nu_{-s}}$ ***где*** $K^\nu_{-s} = \int_{R^\nu} \left(1+y^2\right)^{-s} dy$.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Пусть $u(x,t) \in H^s(R^n)$. Ранее было доказано, что

$$i^{*}u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\nu}}F^{-1}\Big(\int\limits_{R^{\nu}}\hat{u}(p,\tau)d\tau\Big).$$

Индекс пространства Соболева, которому принадлежит функция $i^{*}u(x,t)$, равен $s-\frac{\nu}{2}$. Оценим норму функции $i^{*}u(x,t)$ в пространстве $H^{s-\frac{\nu}{2}}(R^{n-\frac{\nu}{2}})$:

$$\left\|i^{*}u(x,t)\right\|^{2}_{H^{s-\frac{\nu}{2}}}=\int\limits_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^{2}\right)^{s-\frac{\nu}{2}}\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\left|\int\limits_{R^{\nu}}\hat{u}(p,\tau)d\tau\right|^{2}dp=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\int\limits_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^{2}\right)^{s-\frac{\nu}{2}}\left|\int\limits_{R^{\nu}}\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{\frac{s}{2}}\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{-\frac{s}{2}}\hat{u}(p,\tau)d\tau\right|^{2}dp\leq \qquad (3.4.7)$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\int\limits_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^{2}\right)^{s-\frac{\nu}{2}}\Big(\int\limits_{R^{\nu}}\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{s}\left|\hat{u}(p,\tau)\right|^{2}d\tau\int\limits_{R^{\nu}}\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{-s}d\tau\Big)dp.$$

Оценим последний интеграл в (3.4.7):

$$\int\limits_{R^{\nu}}\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{-s}d\tau=\frac{1}{(1+|p|^{2})^{s-\frac{\nu}{2}}}\int\limits_{R^{\nu}}\frac{dt}{\left(1+t^{2}\right)^{s}}=K^{\nu}_{-s}\frac{1}{(1+|p|^{2})^{s-\frac{\nu}{2}}}.$$

Подставляя в равенство (3.4.7), получим

$$\left\|i^{*}u(x,t)\right\|^{2}_{H^{s-\frac{\nu}{2}}}\leq\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}K^{\nu}_{-s}\left\|u(x,t)\right\|^{2}_{H^{s}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{\left\|i^{*}u(x,t)\right\|^{2}_{H^{s-\frac{1}{2}}}}{\left\|u\right\|^{2}_{H^{s}}}\leq\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}K^{\nu}_{-s}.$$

Возьмем в качестве функции $\hat{u}(p,\tau)$ функцию $\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{l}\left(1+|p|^{2}\right)^{N}$. Здесь N и l выбраны так, что $\hat{u}(p,\tau)\in H^{s}$. Таким образом, определен интеграл

$$\left\|u\right\|^{2}_{H^{s}}=\int\limits_{R^{N}}\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{2l+s}\left(1+|p|^{2}\right)^{2N}dpd\tau=\int\limits_{R^{\nu}}\left(1+\frac{|\tau|^{2}}{1+|p|^{2}}\right)^{2l+s}d\frac{\tau}{\sqrt{1+|p|^{2}}}\int\limits_{R^{N-\nu}}\left(1+|p|^{2}\right)^{2l+s+\frac{\nu}{2}+2N}dp=$$

$$=K^{\nu}_{2l+s}K^{\nu}_{2l+s+\frac{\nu}{2}+2N}.$$

Отсюда следует неравенство:

$$\left\|i^{*}u(x,t)\right\|^{2}_{H^{s-\frac{\nu}{2}}}=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\int\limits_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^{2}\right)^{s-\frac{\nu}{2}+2N}\left|\int\left(1+|p|^{2}+|\tau|^{2}\right)^{l}d\tau\right|^{2}dp=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\int\limits_{R^{n-\nu}}\left(1+|p|^{2}\right)^{s-\frac{\nu}{2}+2N}\left|\left(1+|p|^{2}\right)^{l+\frac{\nu}{2}}K^{\nu}_{l}\right|^{2}dp=\frac{1}{(2\pi)^{2}}K^{\nu 2}_{l}K^{\nu}_{s+2l+\frac{\nu}{2}+2N}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\left\|i^{*}u(x,t)\right\|^{2}_{H^{s-\frac{1}{2}}}}{\|u\|^{2}_{H^{s}}}=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\frac{K_{l}^{\nu 2}K^{\nu}_{s+2l+\frac{\nu}{2}+2N}}{K^{\nu}_{2l+s}K^{\nu}_{2l+s+\frac{\nu}{2}+2N}}=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\frac{K_{l}^{\nu 2}}{K^{\nu}_{2l+s}}.$$

Возьмем $l=-s$. Тогда получим равенство

$$\frac{\left\|i^{*}u(x,t)\right\|^{2}_{H^{s-\frac{1}{2}}}}{\|u\|^{2}_{H^{s}}}=\frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}K^{\nu}_{-s}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{\nu}}\sqrt{K^{\nu}_{-s}}\le\frac{\left\|i^{*}u(x,t)\right\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}}{\|u\|_{H^{s}}}\le\frac{1}{(2\pi)^{\nu}}\sqrt{K^{\nu}_{-s}}.$$

Теорема доказана.

***ЗАМЕЧАНИЕ.* Рассмотрим оператор** $i_{*}:H^{-s+\frac{1}{2}}(R^{n-\frac{1}{2}})\to H^{-s}(R^{n})$**. Так как он является сопряженным оператором к оператору** $i^{*}:H^{s}(R^{n})\to H^{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$**, то** $\|i_{*}\|=\|i^{*}\|=\frac{1}{(2\pi)}\sqrt{K^{1}_{-s}}$**.**